مسائل سری دوم درس فرایندهای اتفاقی

۱- اگر $X(t)$ یک فرآیند حقیقی ساکن به مفهوم وسیع،WSS، با متوسط صفر، $m_X = 0$، باشد،WSS بودن کدام یک از فرآیندهای زیر را می‌توان نتیجه گرفت و چرا؟

الف) $Y_1(t) \triangleq e^{jt} X(t)$

ب) $Y_2(t) \triangleq |X(t)|$

ج) $Y_3(t) = e^{j(X(t)+A)}$ که در آن فرایند $X(t)$ نرمال است و $A \sim U(0, 2\pi)$ یک متغیر تصادفی مستقل از $X(t)$ است.

د) $Y_4(t) = e^{JBX(t)}$ که در آن فرایند $X(t)$ نرمال است و B یک متغیر تصادفی گسسته مستقل از $X(t)$ و با جرم احتمالهای $\Pr\{B = 1\} = \Pr\{B = -1\} = 0.5$ می باشد.

۲- یک فرایند ساکن به مفهوم وسیع با تابع متوسط $m_X = 1$ وتابع همبستگی $R_X(\tau) = [1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)]^2$ در نظر گیرید.

الف) متغیرهای تصادفی چه لحظاتی از این فرایند با یکدیگر ناهمبسته اند؟

ب) متغیرهای تصادفی چه لحظاتی از این فرایند به مفهوم ms با هم برابرند؟

ج) احتمال پیش آمد $\{X(0) = X(1)\}$ چقدر است؟

۳- فضای نمونه‌ای شامل دو نقطه $\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$ و با توزیع احتمال یکنواخت $\Pr\{\xi_1\} = \Pr\{\xi_2\} = \frac{1}{2}$ درنظر بگیرید. در این فضا فرآیند $X(t)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X(t,\xi) \triangleq \begin{cases} \sin^2(t), & \xi = \xi_1 \\ \cos^2(t), & \xi = \xi_2 \end{cases}$$

الف) تابع متوسط $m_X(t)$ و تابع کوریانس $C_X(t,s)$ این فرایند را بدست آورید.

ب) در چه لحظاتی مقدار فرایند یک متغیر تصادفی نیست؟

ج) توابع احتمال (CDF, pdf, cf) متغیر تصادفی لحظه $t = \frac{1}{16}$ این فرایند را بدست آورید

۴- فرض کنید $k \in \mathbb{Z}$ و U_k یک رشته از متغیرهای تصادفی می باشد که در آن U_kها مستقل و دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0, 1)$ می‌باشند. حال فرض کنید $X(t)$ یک فرایند تصادفی پیوسته زمان می‌باشد که از درونیابی خطی میان U_kها ایجاد می‌شود. یعنی برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $X(n) = U_n$ و $X(t)$ برای هر $t \notin \mathbb{Z}$ خطی است که نمونه‌های لحظات $(n, n+1)$ را متصل می - نماید.

الف) یک تابع نمونه از فرایند را رسم نمایید.

ب) فرض کنید $t \in \mathbb{R}$ باشد. تابع چگالی احتمال $X(t)$ را بیابید و رسم کنید.

ج) آیا فرایند $X(t)$، WSS می‌باشد؟

د) مقدار $\Pr\{\max_{0 \le t \le 10} X(t) \le 0.5\}$ را بیابید.

۵- برای فرآیند $X(t)$ و در حالت کلی مختلط برای هر t، داریم: $R_X(t+\tau, t) = m_X(\tau)$.

الف) ثابت کنید $m_X(0) \le 1$ است و سپس به کمک نامساوی شوارتز نشان دهید: $|R_X(t+\tau, t)| \le 1$.

ب) اگر مقدار $m_X(1) = 1$ باشد، مقدار $m_X(2)$ را به‌دست آورید. (راهنمایی: از قسمت الف استفاده کنید.)

ج) نشان دهید به ازای هر متغیر تصادفی حقیقی و دلخواه W، برای فرآیند $X(t)=e^{jWt}$ رابطهٔ $R_X(t+\tau,t)=m_X(\tau)$ برقرار است

د) با فرض $X(t)=e^{j2\pi Nt}$ که در آن N دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است، درستی موارد (الف) و (ب) را تایید کنید.

۶ - بردار سه‌بعدی $\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3)^t$ را درنظر بگیرید که در آن $X_1=X(t_0)$، $X_2=X(2t_0)$ و $X_3=X(4t_0)$ متغیرهای تصادفی از یک فرآیند پواسون با چگالی یکنواخت λ هستند.

الف) تابع مولد احتمال بردار $\mathbf{X}$ را به‌دست آورید.

ب) احتمال پیش‌آمدهای شرطی $\{X_1\geq 1\,|\,X_2=2\}$ و $\{X_2=2\,|\,X_1\geq 1\}$ را محاسبه کنید.

۷- برای فرآیند $X(t)$ داریم $X(0)=0$ و به ازای هر t_1 و t_2 داریم: $\mathrm{E}[X(t_2)-X(t_1)]^2=a\,|t_2-t_1|$.

الف) تابع $R_X(t_1,t_2)$ را بدست آورید. آیا فرآیند ساکن است؟

ب) ثابت کنید نموهای فرایند در بازه های زمانی بدون اشتراک متعامدند.

ج) با فرض $m_X(t)=0$ ثابت کنید فرآیند $Y(t)=\frac{1}{\varepsilon}[X(t+\varepsilon)-X(t)]$ ساکن است و

$$R_Y(\tau)=\begin{cases}\frac{a}{\varepsilon}(1-\frac{|\tau|}{\varepsilon}) & |\tau|\leq\varepsilon\\ 0 & |\tau|\geq\varepsilon\end{cases}=\frac{a}{\varepsilon}\Lambda(\frac{\tau}{\varepsilon})$$

۸- فرض کنید $X(t)$ یک فرآیند پواسن با چگالی نقاط $\lambda=e^{\frac{t}{2}}$ است. متغیر تصادفی A نیز مستقل از فرآیند $X(t)$ بوده و دارای توزیع نمایی با پارامتر واحد می باشد. متوسط و واریانس متغیر تصادفی $Y=X(A)$ را بدست آورید.

۹- یک فرآیند نرمال $X(t)$ با متوسط صفر و تابع همبستگی $R_X(\tau)=5\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)3^{-|\tau|}$ را در نظر بگیرید.

الف) ماتریس کواریانس بردار تصادفی $Y=\left(X(2),X(3),X(4)\right)^t$ را بنویسید.

ب) امید ریاضی شرطی $E\left(X(4)\,|\,X(2),X(3)\right)$ را تعیین کنید.

۱۰- $X(t)$ یک فرآیند نرمال با تابع متوسط صفر و تابع همبستگی $R_X(\tau)=\frac{\sin^2(4\pi\tau)}{\pi^2\tau^2}$ است.

الف) متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ این فرآیند به ازای چه مقادیری از t_1 و t_2 مستقل از هم هستند و چرا؟

ب) دو متغیر تصادفی $Y_1=X(t)-X(t-0.5)$ و $Y_2=X(t)+X(t+0.5)$ را درنظر بگیرید و تابع چگالی تک‌تک (کناری) و همچنین تابع چگالی احتمال توام آن‌دو را به‌دست آورید.

ج) تابع مشخصهٔ (cf) توام سه متغیر تصادفی $Z_1=X(t-0.25)$، $Z_2=X(t)$ و $Z_3=X(t+0.25)$ را پیدا کنید.

۱۱- فرآیند سیگنال تلگرافی $X(t)$ با چگالی نقاط پواسون ثابتِ λ را درنظر بگیرید. سه متغیر تصادفی آن را $X_1=X(1)$، $X_2=X(2)$ و $X_3=X(3)$ می‌نامیم.

الف) ماتریس همبستگی بردار $\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3)^t$ را به‌دست آورید.

ب) احتمال پیش‌آمد $\Pr\{X_1=X_2=X_3\}$ را بیابید.

ج) متغیر تصادفیِ لحظه تصادفیِ $t=X_1+2$ فرآیند را $X_4=X(X_1+2)$ می‌نامیم. متوسط و واریانس X_4 را تعیین کنید.

۱۲- در فرآیند $X(t) = a\cos(\omega_o t + \frac{2\pi N}{m})$ مقادیر a، ω_0 و m ثابت هستند و متغیر تصادفی N با احتمال مساوی یکی از مقادیر $\{0\ ,\ 1,\ \ldots\ ,m-1\}$ را اختیار می‌کند.

الف) آیا فرآیند در متوسط ارگادیک است(ME)؟ چرا؟

ب) آیا فرآیند از نظر همبستگی ارگادیک است(CE)؟ چرا؟

۱۳- فرآیند وینری با تعریف $X(t) = \int_0^t W(\alpha)d\alpha$ و برای $t \in (-\infty,\infty)$ درنظر بگیرید که در آن $W(t)$ فرآیند نویز سفید نرمال با تابع همبستگی $R_W(\tau) = N_0\delta(\tau)$ است.

الف) ثابت کنید:

$$R_X(t_1,t_2) = \begin{cases} N_0 \min(|t_1|,|t_2|) & t_1t_2 \geq 0 \\ 0 & t_1t_2 \leq 0 \end{cases}$$

ب) ME بودن و یا نبودن فرآیند فوق را تعیین کنید.

۱۴- در رابطه با مساله ۳ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) آیا این فرآیند در متوسط ارگادیک است (ME)؟ چرا؟

ب) آیا این فرآیند در تابع همبستگی ارگادیک است (CE)؟ چرا؟

۱۵- فرض کنید $X(t)$ یک فرآیند با تابع متوسط $m_X(t) = 0$ و تابع همبستگی $R_X(t+\tau,t) = e^{-t^2}\delta(\tau)$ است.

الف) آیا این فرآیند از نظر متوسط ارگادیک است (ME)؟ چرا؟

ب) آیا این فرآیند از نظر همبستگی ارگادیک است (CE)؟ چرا؟